10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Να δείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) $2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x\geq 3x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

γ) $4\sigma\upsilon\nu x+2\ln(\sigma\upsilon\nu x)+3x^2\leq 4$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Υπάρχει $\rho\in\left(0,\frac{\pi}{5}\right)$ τέτοιο, ώστε $2\eta\mu\rho+\varepsilon\varphi\rho-3\rho=(5\rho-\pi)^{10}$.

ε) Αν $f(\alpha-\beta)+f(\alpha+\beta)+400f(\gamma)=0$,να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$.

11. Ισοσκελές τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1 cm. Έστω α cm το μήκος των ίσων πλευρών του και θ η γωνία που σχηματίζουν.

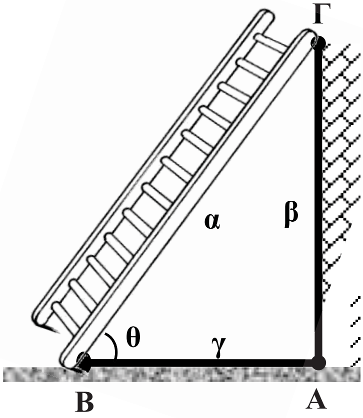
α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$E=(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta.$$

β) Να βρείτε την τιμή του $\theta\in(0,\pi)$ για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται μέγιστο.

γ) Αν η γωνία θ αυξάνεται με ρυθμό 1 rad/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους α των ίσων πλευρών, τη χρονική στιγμή που το τρίγωνο γίνεται ισόπλευρο.

12. Μια σκάλα μεταβλητού μήκους α m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο.



α) Αν $\gamma=1$, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)$ **ii)** $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2)$

iii) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\beta}{\alpha}$

β) Έστω ότι η σκάλα έχει σταθερό μήκος $\alpha=3\text{m}$. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο και απομακρύνεται από τον κατακόρυφο τοίχο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:

i) Τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ.

ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Γ της σκάλας.

13. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$2f^3(x)+6f(x)=2x^3+6x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι:

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε δεν έχει ακρότατα.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f αντιστρέφεται και ισχύει ότι $f(x)>f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

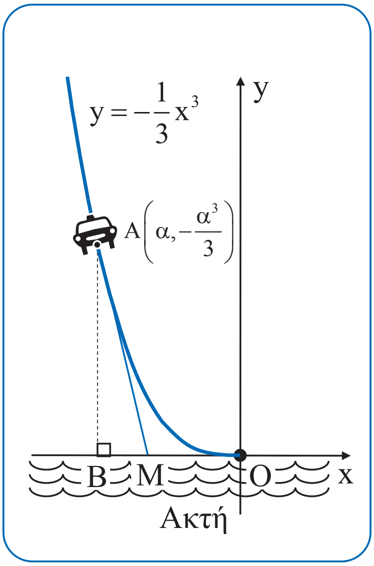
δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ε) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

στ) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{3}x^3,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης C_f, $x\le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμη-μένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.



β) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ είναι

$$f\left((1+x)^\nu\right)<f(1+\nu x),\ \nu\in\mathbb{N} \text{ με } \nu\ge 2.$$

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ είναι

$$(1+x)^\nu>1+\nu x+\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2,\ \nu\in\mathbb{N} \text{ με } \nu\ge 3.$$

δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

15. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3 \text{ για κάθε } h\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι:

α) $f(1)=2$

β) $f'(1)=3$

γ) $f(x)=x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $e^{3x^2}\ge(x^2+1)^3$.

16. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=x-2\sqrt{x}+1,\ x\geq 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$(g\circ g)(x)=x \text{ για κάθε } x\in[0,1].$$

β) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να μελετήσετε τη g ως προς τη κυρτότητα.

δ) Να εξετάσετε αν η g έχει ασύμπτωτες.

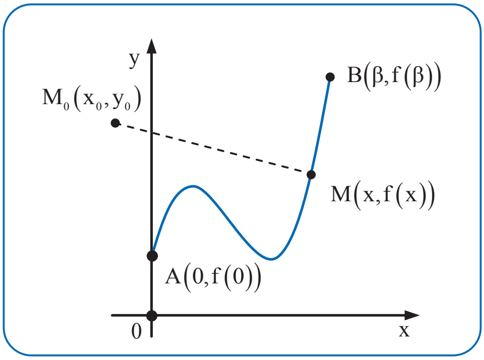
ε) Με βάση τα ερωτήματα β,γ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g.

στ) Να λύσετε στο $[0,1]$ την εξίσωση

$$g(g(g(g(\eta\mu x))))=g(g(x)).$$

ζ) Να αποδείξετε ότι $4x-4\sqrt{2x}+2\leq\left(\sqrt{3x}-1\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2$ για κάθε $x\geq 0$.

17. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο $[0,\beta]$ και το $M_0(x_0,y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου:



α) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης

$$d(x)=(M_0M)$$

του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f για κάθε $x\in[0,\beta]$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[0,\beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

γ) Έστω ότι $f(x)=x^3-4x^2+4x+1$ και $B(3,4)$. Να βρείτε υποσύνολο του διαστήματος $[0,3]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f και στη συνέχεια να βρείτε τη τετμημένη ξ του σημείου στο οποίο η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

δ) Κάνοντας κατάλληλη μελέτη της f, να σχεδιάσετε τα τμήματα που λείπουν.