

2018

Διαγώνισμα 2ο: Τύπου Β'

(ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο)

Επαναληπτικό

Διάρκεια διαγωνίσματος: 2 ώρες

Ημερομηνία Εξέτασης: 20..



Στοιχεία μαθητή:

.....

Βαθμός (100)

Βαθμός (20)



ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

..... 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1

A. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

B. Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x, y που συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 . Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Μονάδες 4

Γ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, μεταφέροντας την πρόταση στο τετράδιο σας σωστά διατυπωμένα.

i) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = \dots\dots\dots$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = \dots\dots\dots$

ii) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\dots\dots\dots$ τότε είναι η $f \circ g$ παραγωγίσιμη στο Δ με $(f(g(x)))' = \dots\dots\dots$

iii) Αν f και g συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \dots\dots\dots$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \dots\dots\dots$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \dots\dots\dots$$

Μονάδες 6

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

β. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο

$$[\alpha, \beta], \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

γ. Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$

ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες: 2 + 6 + 6 + 4 + 7)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1}, \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του λ .

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το λ και m .

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του λ .

ε) Αν $\lambda \in (1, 2)$ τότε να αποδείξετε ότι $\frac{3}{2} < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) < 2$

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 6 + 5 + 4 + 5 + 5)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \sin x - 1 + \frac{1}{2}x^2, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατά της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

δ) Αν $f(x^{2017} - 1) + f(\eta\mu y - |y|) + f(x + y + z) \leq 0$, $x, y, z \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε τα x, y, z .

ε) Αν $g(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3$, $x \in \mathbb{R}$, τότε να εξετάσετε το πρόσημο της $g(x)$ στο πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ 4 (μονάδες: 5 + 5 + 4 + 5 + 6)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \sqrt{x} \text{ και το σημείο } A\left(\frac{9}{2}, 0\right).$$

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφάπτεται της

C_f στο Γ .

- β) Να βρείτε το σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.
- γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM .
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f την εφαπτομένη στο M του ερωτήματος (β) και της ευθείας $y = 0$.
- ε) Να βρείτε την ευθεία $x = a$ η οποία χωρίζει το χωρίο Ω του ερωτήματος (γ) σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**