

ΑΡΧΗ 1^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ****ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ****Γ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΜΑΙΟΣ 2018****ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΠΤΑ (7)****ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΜΠΑΖΟΥΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ – 5^ο ΓΕ.Λ. ΒΕΡΟΙΑΣ****ΘΕΜΑ Α.****A.1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε
η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 8**A.2.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική ή παράγουσα της f στο Δ ; **Μονάδες 3****A.3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: Αν η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , τότε κατά ανάγκη θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ **α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.**Μονάδα 1****β.** Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας στο ερώτημα **α.** **Μονάδες 3****ΤΕΛΟΣ 1^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ**

ΑΡΧΗ 2^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη ‘**Σωστό**’ ή ‘**Λάθος**’ δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση **Μονάδες 10**

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ τότε υποχρεωτικά ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$$

β) Αν μια συνάρτηση έχει θετική παράγωγο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

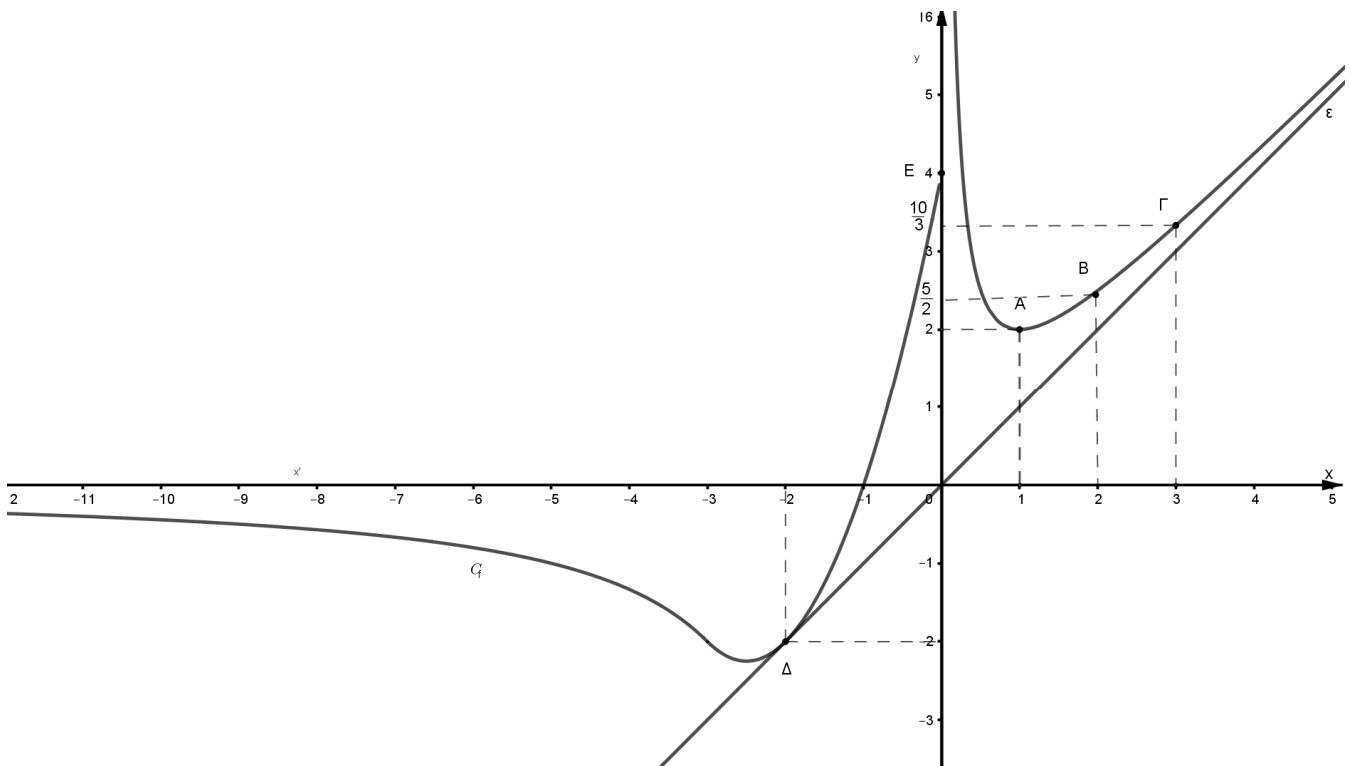
δ) Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in A$ τότε ισχύει υποχρεωτικά και $f'(x) > g'(x)$ για κάθε $x \in A$

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές

ΤΕΛΟΣ 2^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Οι ημιάξονες Oy, Ox' είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f ενώ η ευθεία ε είναι εφαπτομένη και ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

**ΤΕΛΟΣ 3^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ**

ΑΡΧΗ 4^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

B.1. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f$

Μονάδες 2

B.2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο $[1, +\infty)$ και

να σχεδιάσετε στο τετράδιο σας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , όπου f^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Μονάδες 3

B.3. Αν $\int_1^{\frac{5}{2}} f(x) dx = \frac{21}{8} + \ln \frac{5}{2}$, να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} και τις ευθείες $x=2$ και $x=\frac{5}{2}$.

Μονάδες 3

B4. Να υπολογίσετε την τιμή $f\left(1 + f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)$

Μονάδες 1

B5. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) + \alpha = 2020$ έχει τρεις ρίζες άνισες

Μονάδες 3

B6. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{xf(x) + \frac{2}{x} - 3}{x+2}$

Μονάδες 5

B7. Να βρείτε τα παρακάτω όρια δικαιολογώντας την απάντησή σας

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x}$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(f(x)) - x)$

Μονάδες 6 (1+1+2+2)

ΤΕΛΟΣ 4^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 5^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

B8. Αν το εμβαδό E_1 του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον x ' x και τις ευθείες $x = -3, x = -1$ ισούται με $\frac{10}{3}$ και το εμβαδό E_2 του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον x ' x και τις ευθείες $x = -1, x = -\frac{1}{2}$ ισούται με $\frac{5}{12}$,

α) να βρείτε την τιμή του $\int_{-3}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx$ **Μονάδα 1**

β) να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την ευθεία ε και τις ευθείες $x = -3, x = -1$

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συναρτήσεις $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και η κυρτή συνάρτηση $h: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = (f(x))^{f(x)}$ για τις οποίες ισχύουν

- η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$
- η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$
- $|f(x) - \ln x - f(y) + \ln y| \leq (x - y)^{2018}$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$
- $\int_1^{f(1)+1} (1 + (f(x))^2) dx = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xg(x) - x_0g(x_0)}{x - x_0} = 2x_0$ για κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$
- $\int_1^2 g(x) dx = \frac{3}{2}$

ΤΕΛΟΣ 5^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 6^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ1. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ **μονάδες 3**

Γ1. β. Να αποδείξετε $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x$ **μονάδες 5**

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα **μονάδες 6**

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_e^{e^2} h(x) dx > e^2$ **μονάδες 6**

Γ4. Αν $\varphi(x) = f(x) + g(x), x > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της $\varphi(x)$ στο x_0 , να είναι ίσος με y_0 **μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \kappa, & x < 0 \\ 4x^3 - 6 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx, & x \geq 0 \end{cases}$ και

ο πραγματικός αριθμός κ

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 0$ και $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = 6$ **Μονάδες 4**

Δ2. Έστω E το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τον $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ με $0 < \alpha \leq \beta$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $\alpha = 5\text{cm}$ και $\beta = 19\text{cm}$. Για κάθε $t > 0$ το α αυξάνει με σταθερό ρυθμό $0,016 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ και το β αυξάνει με σταθερό ρυθμό $0,002 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$

ΤΕΛΟΣ 6^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 7^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδό του χωρίου Ω θα μηδενιστεί **Μονάδες 4**

β) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδό του χωρίου Ω **Μονάδες 5**

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(-1-f(x))=1$ **Μονάδες 4**

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha) 0 \leq \int_{-1}^0 (f(x) + f(x^2)) dx \leq 5$$

$$\beta) f\left(\int_{-1}^0 f(x^2) dx\right) \leq 256$$

Μονάδες 4

Δ5. Έστω $\omega(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(x, f(x), x > 0$ και $\omega(x)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να βρείτε την τιμή του $x > 0$ για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\omega(x)$ γίνεται μέγιστος

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήγει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
3. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
4. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΤΕΛΟΣ 7^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ