2018

Διαγώνισμα 2ο: Α' τύπου

Μόνο θέματα θεωρίας

Επαναληπτικό

Διάρκεια διαγωνίσματος: 1 ώρα

Ημερομηνία Εξέτασης: …………………… 201..

Στοιχεία μαθητή:

……………………………………………………………

Βαθμός (100) …………

Βαθμός (20) ………….

Επιμέλεια: Μάκης Χατζόπουλος για το
http://lisari.blogspot.gr

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
………………… …… ……………… 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$ *(μονάδες 7).* Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ όπου Q(x) πολυώνυμο του x με $Q(x_0)\neq 0$ *(μονάδες 2).*

Μονάδες 9

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνάρτηση που είναι «1 – 1» είναι και γνησίως μονότονη.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε x κοντά στο x_0.

γ) Σε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης f το τοπικό ελάχιστο βρίσκεται χαμηλότερα από το τοπικό μέγιστο.

δ) Για κάθε «1 – 1» συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f\left(f^{-1}(y)\right)=y, y\in f(A)$

ε) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα [α, β]. Αν η G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha)$$

Μονάδες 9

Β2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat *(μονάδες 4)* και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του *(μονάδες 2).*

Μονάδες 6

Β3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)<0$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$, τότε ισχύει $\left(\int_\alpha^\beta f\left(x\right)dx\right)'=0$

γ) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
δ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $3^{ου}$ βαθμού έχει πάντα σημείο καμπής.

ε) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 9

Γ2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε η f λέγεται συνάρτηση 1–1 *(μονάδες 4);* Να γράψετε την ισοδύναμη πρόταση του ορισμού *(μονάδες 2).*

Μονάδες 6

Γ3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Σε κάθε λανθασμένη πρόταση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.**

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\eta\mu x+x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}\leq1$.

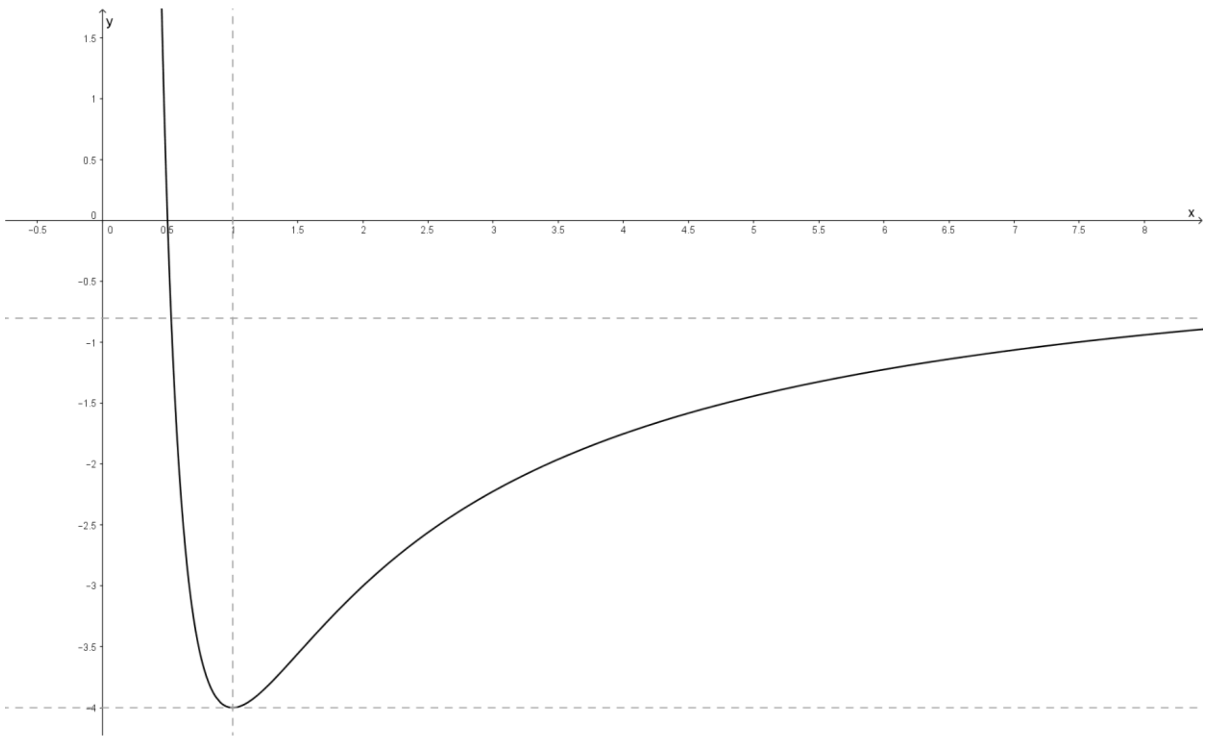
β) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε $f'\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε g' συνεχής συνάρτηση στο $\left[\alpha,\beta\right]$ ισχύει ότι

$$\int_\beta^\alpha f\left(x\right)g'\left(x\right)dx=\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]_\alpha^\beta-\int_\beta^\alpha f'\left(x\right)g\left(x\right)dx$$

δ) Κάθε ρητή συνάρτηση της μορφής $\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$,όπου $P\left(x\right),Q\left(x\right)$ πολυώνυμα του x για τα οποία ισχύει ότι ο βαθμός του $P\left(x\right)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του $Q\left(x\right)$ κατά 2, τότε δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) Δίνεται η συνάρτηση $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$. Παρακάτω απεικονίζεται η γραφική παράσταση της f' τότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x=1$.



Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 8

Δ2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 2

Δ3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **<u>Σε κάθε λανθασμένη πρόταση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με ένα παράδειγμα.</u>**

α) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα [α, β]. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

γ) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

δ) Κάθε 1 – 1 συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι και γνησίως μονότονη στο Α.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$, $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$.

Μονάδες 15

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ