

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

1^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

(Μονάδες 3)

A2.

i) Έστω A είναι υποσύνολο του \mathbb{R} . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

(Μονάδες 2)

ii) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

(Μονάδες 2)

iii) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

(Μονάδες 2)

iv) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « Αν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε είναι γνησίως μονότονη ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα A , αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

(Μονάδες 2)

v) Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα A , αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

(Μονάδες 1)

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

(Μονάδες 2)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)**, αν είναι σωστή ή με **Λάθος (Λ)**, αν είναι λανθασμένη :

α) Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

ε) Έστω μία συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια, συνεχής στο \mathbb{R} και γνησίως μονότονη στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 4$, $f(4) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

B₁. Να βρείτε τη μονοτονία της σε όλο το \mathbb{R} και το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 5)

B₂. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f \circ f$ στο \mathbb{R} και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στο $[-4, 4]$.

(Μονάδες 5)

B₃. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{f(x)}$.

(Μονάδες 5)

B₄. Αν $g(x) = f(x+1) - f(x) + 1$, τότε:

i) Αποδείξτε ότι $g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 0$.

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in [0, 3]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\mu+1) = f(\mu) - 1$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = 2\eta\mu x - 3x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

(Μονάδες 2)

Γ₂. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) < 0$.

(Μονάδες 5)

Γ₃. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 3)

Γ₄. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

(Μονάδες 5)

Γ₅. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής σε $x_0 \neq 0$ αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής και στο $-x_0$.

(Μονάδες 5)

Γ₆. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 1$

Δ₁. Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(Μονάδες 4)

Δ₂. Ισχύει $-1 < f^{-1}(0) < 0$.

(Μονάδες 2)

Δ₃. Για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι ισχύει: $|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$.

(Μονάδες 4)

Δ₄. Αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

(Μονάδες 3)

Δ₅. Γνωρίζοντας ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) + x^3 + 1 = 0$ έχει μοναδική λύση στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 3)

Δ₆. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f^{-1}(x) - x$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$: $-\frac{3}{2} \leq \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \leq -\frac{1}{2}$

(Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία λύση.

(Μονάδες 3)

iii) Αν ξ είναι η μοναδική λύση στο ερώτημα (Δ₅), να επιλυθεί η ανίσωση $f^{-1}(-1 + \xi - g(2x + 1 - \eta \mu x)) < -\xi^3 - 1$.

(Μονάδες 3)

Καλή επιτυχία

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το Θέμα Β' επιμελήθηκε ο Ρουσσάλης Ηλίας, Μαθηματικός του Γυμνασίου & Λυκείου Λεωνιδίου.

Το Θέμα Γ' επιμελήθηκε ο Χήτος Γεώργιος, Μαθηματικός από το Ρέθυμνο.

Το Θέμα Δ' επιμελήθηκε ο Παντερής Ανδρέας, Μαθηματικός-MSc του 2ου ΓΕΛ Ηρακλείου Κρήτης.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.