

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**5^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαια 2, 3)
[Κεφάλαια 1, 2 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 9

A2.

1) Να αναφέρετε τις πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f που ορίζεται σε ένα διάστημα Δ .

Μονάδες 2

2) Που αναζητούμε ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

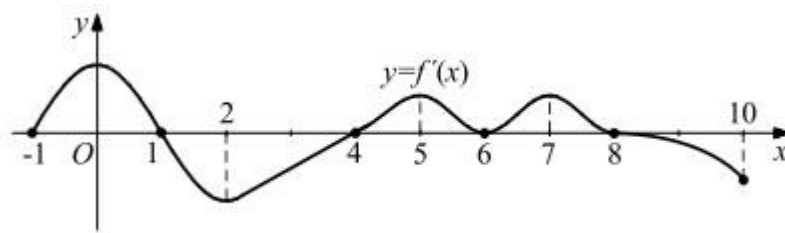
Μονάδες 2

3) Ποιές είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 2

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)**, αν είναι σωστή, ή με **Λάθος (Λ)**, αν είναι λανθασμένη:

α) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 10]$.



1) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[-1, 1]$, $[4, 8]$.

Σ Λ

2) Η f είναι κοίλη στα $[-1, 0]$, $[2, 5]$ και $[6, 7]$.

Σ Λ

3) Τα $-1, 4, 10$ είναι θέσεις τοπικών μεγίστων.

Σ Λ

4) Τα $0, 2, 5, 6, 7$ είναι θέσεις σημείων καμπής.

Σ Λ

β) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Σ Λ

γ) Αν f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και ισχύουν:

α) $f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0 και β) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε θα ισχύει:

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$. Σ Λ

δ) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ . Σ Λ

ε) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} . Σ Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, $x > 0$.

1) Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Μονάδες 10

2) Αποδείξτε ότι ισχύει $e^{\frac{x^2-1}{2}} \geq x$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 3

3) Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{x^2-k} = x^2$, με $x > 0$ για τις διάφορες τιμές του $k > 0$.

Μονάδες 5

4) Βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, να είναι

συνεχής.

Μονάδες 3

5) Για $\alpha = -1$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, e)$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 6f(x) = 3x + 2017, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- 1) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 3

- 2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη. Μονάδες 3

- 3) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι όλο το \mathbb{R} και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} . Μονάδες 6

- 4) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -670} f(x)$ και β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) \cdot \eta\mu x}{x^4}$. Μονάδες 6

- 5) Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $h(x) = f^{-1}(x)$ στο σημείο $A(0, h(0))$ και αποδείξετε ότι αυτή ' ' διαπερνά ' ' την καμπύλη της γραφικής παράστασης της h (ή ότι το σημείο A είναι σημείο καμπής). Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[1, 4]$.

Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[-2, 3]$ και $f(1) = 2$, $f(4) = 1$ τότε:

- 1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 4)$, έτσι ώστε $f(x_0) = 0$. Μονάδες 3

- 2) Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτόμενες και έχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής. Μονάδες 5

- 3) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon) : y = -x + 2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1, 4)$. Μονάδες 4

- 4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$, έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $P(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$. Μονάδες 5

5) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (1, 4)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ έτσι ώστε

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{2f'(\xi_2)} = -\frac{3}{2}$$

Μονάδες 3

6) Ένα σημείο K κινείται στην ευθεία (ε) του ερωτήματος (3), η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο M και Λ η προβολή του K στον άξονα $x'x$. Το σημείο Λ απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ με ρυθμό $1m/sec$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $K\Lambda M$ τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του K είναι ίση με την τεταγμένη του.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.