

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**3^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαιο 2)
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ισχύει
 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, με $x_0 \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

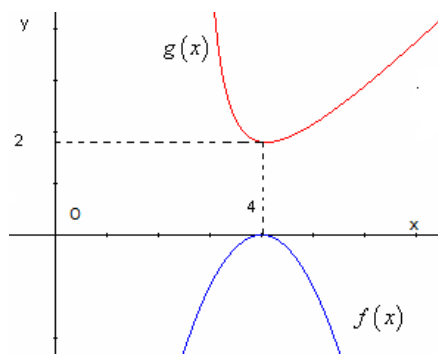
2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**:

α) Δίνεται το παρακάτω σχήμα τότε $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2



β) Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 2

γ) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

Μονάδες 2

δ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο $A = [1, 4]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$ και $f(3) = -2$. Τότε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

Μονάδες 2

ε) Δίνεται η συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f^{-1}(-2015) = 4$, $f^{-1}(1949) = -1$. Τότε δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Μονάδες 10

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta\mu x$.

Μονάδες 5

3. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 + \sigma\upsilon\nu x}{x}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2 + \ln^2 x & , 0 < x \leq e \\ \alpha x + \ln(x - e + 1), & e < x \end{cases}$

α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β) Αν $\alpha = \frac{3}{e}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2e)$.

Μονάδες 5

2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν: $f(e^{f(x)}) = 4 \ln x + 3$, για κάθε $x > 0$ και $(f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x^4 + 3)^2 + 1$ για κάθε $x > e^{-3/4}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f\left(e^{x-2014} + \frac{3}{2}\right)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$, $x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 3

3. Να δείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} (Μονάδες 5).

Μονάδες 7

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $(\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha)(\sqrt{\beta^2 + 1} + \beta) = 1$ να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 0$.

Μονάδες 5

5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Δ επιμελήθηκε ο Συγκελάκης Αλέξανδρος, Μαθηματικός του Πρότυπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο και Σούγελα Ελένη.